Kubische und quadratische Transformationen des projektiven n-dimensionalen Raumes in sich, deren begleitendes Strahlensystem dem einer Kollineation identisch ist

Auszug aus der

Inauguraldissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

von
Henning Germer
aus Braunschweig

Würzburg 1955

Tag der mündl. Prüfung:
29. Juli 1955

Referenten: Rrofessor Dr. Hermann S c h m i d t

Professor Dr. Hermann Ludwig S c h m i d

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Eine Anzahl spezieller Cremona-Transformationen $y = T(x)$ des R_2 und R_3 lassen sich mit Vorteil diskutieren, wenn ihr begleitendes Strahlensystem (b.S.), die Gesamtheit der Geraden $\overline{xy}$, einem einfacheren Bildungsgesetz genügt. Beispiel: die projektive Inversion ($\overline{xy}$ bilden Strahlenbündel). Es liegt daher nahe, das b.S. einer bekannten C.-T. zur Konstruktion anderer Transformationen zu verwenden. Man hat dann zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen man bei gegebenem Ansatz (incidenztreu) algebraische oder rationale Umkehrungen erhält.

Zu diesen Verfahren führen wir folgendes Beispiel in projektiven R_n über den Körper der komplexen Zahlen durch: $(x,y,\ldots$ seien Zeilenmatrizen und bezeichnen Punkte des R_n; A,K seien (n+1)-reihige quadratische Konstantenmatrizen): Gegeben das b.S. einer beliebigen Kollineation $x^1 = x.A$ und eine Korrelation $f(x,y) \equiv x.K.\tilde{y} = 0$. Der Schnittpunkt y der Geraden $\overline{xx^1}$ mit der den Punkt x vermöge der Korrelation zugeordneten Bildhyperebene genügt der rationalen Abbildungsgleichung

$$y = x^1.f(x,x) - x.f(x,x^1) \quad . \tag{1}$$

y ist damit festgelegt für alle Punkte x, die weder einem der Haupträume (Räume von Fixpunkten bezüglich A)

$$H_\varrho: \qquad x^1 = a_\varrho x \qquad (\varrho = 1,\ldots,r)$$

noch der Mannigfaltigkeit

$$M: \qquad f(x,x) = f(x,x^1) = 0$$

angehören. Die Abbildung (1) ist kubisch, wenn $f(x,x^1)$ und $f(x,x)$ teilerfremd sind und A nicht Matrix einer Zentralkollineation ist. Sie ist quadratisch, wenn entweder eine Zentralkollineation das b.S. erzeugt oder $f(x,x^1)$ und $f(x,x)$ genau einen Linearfaktor gemeinsam haben, ohne daß jeweils die andere

dieser beiden Voraussetzungen erfüllt ist. Sie ist endlich linear, wenn entweder $b\,f(x,x^1) - c\,f(x,x) \equiv 0$, oder wenn $f(x,x^1)$ in zwei Linearfaktoren zerfällt, deren einer Teiler von $f(x,x)$ ist, und A als Matrix einer Zentralkollineation so vorliegt, daß ihre Haupthyperebene durch den anderen Faktor von $f(x,x^1)$ beschrieben wird.

Das der Abbildung (1) zugrunde gelegte b.S. wird beschrieben durch die Kollineationsschar (E ist die Einheitsmatrix)

$$y = x\cdot(\mu A + \lambda E) \tag{2}$$

mit Unbestimmten λ, μ. Die Schar der zu (2) inversen Kollineationen beschreibt zu gegebenem y die Gesamtheit der Punkte x, deren Systemstrahlen $\overline{xx^1}$ den Punkt y enthalten zu Parameterwerten $\lambda/\mu \neq -a_\varrho$ $(\varrho = 1,\ldots,r)$, wenn a_ϱ die charakteristischen Wurzeln von A sind. Für die Matrix $(\mu A + \lambda E)^{-1}$ läßt sich eine nur noch in λ, μ rationale Darstellung (Partialbruchzerlegung) angeben, mit Hilfe deren wir nach Multiplikation mit dem Minimalpolynom $\delta(\lambda,\mu)$ zu A die inverse Schar in Polynomgestalt erhalten:

$$\begin{aligned} x^* &= \delta(\lambda,\mu)\, y\cdot(\mu A + \lambda E)^{-1} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \lambda^{d-j-1}\mu^j \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{(j-i)!}\,\delta_\mu^{(j-i)}(0)\; y^i \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei ist d der Grad von $\delta(\lambda,\mu)$, $\delta_\mu^{(k)}(0)/k!$ der Koeffizient von $\mu^k\lambda^{d-k}$ in $\delta(\lambda,\mu)$ und – zur Abkürzung – $y^i = y\cdot A^i$. Mit Unbestimmten λ, μ, y sind die Summanden in (3) insgesamt teilerfremd; nach Spezialisierung von y ergibt sich ein größter gemeinsamer Teiler von Grade $d - d_y \geq 0$. (3) beschreibt zu jeden y eine rationale Normkurve in den kleinsten y enthaltenden, gegenüber A invarianten Raum M(y) der Dimension $d_y - 1$. Ihr gehören außer den oben erwähnten Punkten x nur noch die (isolierten) Hauptpunkte der von A in M(y) induzierten

Kollineation an. Ist zu gegebenem y ein Punkt x außerhalb (3) zu finden, dessen Systemstrahl (2) y enthält (zwangsläufig für $\lambda/\mu = -a_\varrho$), so liegt x auch außerhalb M(y); ist $d_y = d$, so existiert kein solches x.

Der erwähnte gemeinsame Teiler in (3) für spezialisiertes y ist Teiler von $\delta(\lambda,\mu)$; der Quotient ist $\delta_y(\lambda,\mu)$ vom Grade d_y, Hauptnenner der rationalen Darstellung der Umkehrung von (2), und heiße zu y gehöriges Minimalpolynom in A; es ist $y.\delta_y(A,-E) \equiv 0$. Analog erhalten wir zu beliebig spezialisiert vorgegebener Linearform l(x) nach Einsetzen von (3) ein zugehöriges Minimalpolynom in A: $\delta_1(\lambda,\mu)$ mit den Eigenschaften, daß $l(y.\delta_1(A,-E)) \equiv 0$ und $\delta_1(\lambda,\mu)\, l(y.(\mu A + \lambda E)^{-1})$ ein irreduzibles Polynom in den Unbestimmten λ, μ, y ist. Schließlich ergibt sich zu jeder Bilinearform f(x,y), x durch (3) ersetzt, in gleicher Weise ein zugehöriges Minimalpolynom $\Delta(\lambda,\mu)$ in A mit den Eigenschaften, daß $f(y.\Delta(A,-E), y) \equiv 0$ und $\Delta(\lambda,\mu)\, f(y.(\mu A + \lambda E)^{-1}, y)$ ein Polynom in den Unbestimmten λ, μ, y ist, das keinen Teiler mehr mit $\delta(\lambda,\mu)$ gemeinsam hat.

Ist y derart vorgegeben, daß $d_y = d$ ist - damit sind nur endlich viele algebraische Hyperflächen ausgeschlossen -, so liegt jedes Urbild zu y gemäß (1) auf (3) korrelativ zu y; seine Parameter λ/μ sind Nullstellen der Gleichung

$$(4) \qquad f(x^*,y) = \frac{\delta(\lambda,\mu)}{\Delta(\lambda,\mu)}\ \Phi(\lambda,\mu;y) = 0$$

$$\text{mit} \qquad \Phi(\lambda,\mu;y) \equiv \sum_{j=0}^{D-1} \lambda^{D-j-1}\mu^j \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{(j-i)!}\, \Delta_\mu^{(j-i)}(0)\, f(y^i,y)\,.$$

Die Form $\Phi(\lambda,\mu;y)$ in (4) kann möglicherweise zerfallen. Es treten genau die folgenden drei Fälle auf (im Vergleich mit der Diskussion des Abbildungsgrades auf Seite 1):

a) Φ ist irreduzibel, entsprechend teilerfremden $f(x,x)$, $f(x,x^1)$;

b) Φ zerfällt in y entsprechend $f(x,x)=l(x)m_1(x)$, $f(x,x^1)=l(x)m_2(x)$, $m_1 \neq m_2$;

c) $\Phi(\lambda,\mu;\,y) = \Phi_0(\lambda,\mu;\,y)(\mu b+\lambda c)$, $b/c \neq a_\varrho$, entsprechend $cf(x,x^1)-bf(x,x)\equiv 0$.

Im Falle b) erhalten wir mit $m_2(x) = m_1(x^1) + m(x)$ und y nach (2)

$$f(x,y) = 1(x)\left[\mu\, m(x) + m_1(\mu x^1 + \lambda x)\right] = 0, \tag{5}$$

als Parametergleichung in x, und aus dieser nach Ersetzen von x durch x* nach (3) und Vergleich mit (4) eine reduzierte Darstellung:

$$\Phi(\lambda,\mu;\,y) \equiv \Lambda(\lambda,\mu;\,y)\,\Psi(\lambda,\mu;\,y) \tag{6}$$

mit $\Lambda(\lambda,\mu;\,y) \equiv \delta_1(\lambda,\mu)\,1(y,(\mu A+\lambda E)^{-1})$ (s. Seite 3)

und $\Psi(\lambda,\mu;\,y) \equiv \sum_{j=0}^{D_1} \lambda^{D_1-j}\mu^j \left[\sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^{i-1}}{(j-i)!}\Delta_{1,\mu}^{(j-i)}(0)\,m(y^{i-1}) + \frac{1}{j!}\Delta_{1,\mu}^{(j)}(0)\,m_1(\ldots\right.$

Dabei ist $D_1 < d$ der Grad des zu m(x) gehörigen Minimalpolynoms in A, $\delta_m(\lambda,\mu) = \Delta_1(\lambda,\mu)$, alle übrigen Bezeichnungen analog (3),(4).

Mit diesen vorbereitenden Untersuchungen können wir nun erschöpfende Aussagen über die zu (1) inverse Abbildung gewinnen. Bezeichnen wir einen Punkt x als regulär, wenn (1) in x nicht unbestimmt wird und M(y) = M(x) ist, so existiert zu jedem y eine Zahl k_y, die Anzahl der voneinander verschiedenen regulären Urbilder zu y, bezüglich (1), sofern nicht alle Koeffizientenpolynome $f(y^i,y)$ in (4) verschwinden (und das ist nur für eine algebraische Mannigfaltigkeit der Fall, wenn (1) nicht überall unbestimmt sein soll). Das Maximum aller k_y im R_n sei $k \leq d-1$ (vgl. Schlußbemerkung des Absatzes um (3)), wir erhalten

Satz 1: Die Gesamtheit der regulären Urbilder zu gegebenem y wird beschrieben

von (3) mit den Wurzeln $\lambda/\mu \neq -a_\varrho$ von

$\Phi(\lambda,\mu;\,y) = 0$, (4), in Falle a), Seite 3 unten;

$\Psi(\lambda,\mu;\,y) = 0$, (6), in Falle b);

$(\mu b + \lambda c) = 0$, in Falle c).

Dabei ist k bezw. gleich $D-1$, D_1, 1, dem Grad in λ,μ dieser Polynome.

Der Beweis ergibt im Einzelnen, Daß (3) mit den Nullstellen von $\delta(\lambda,\mu)/\Delta(\lambda,\mu)$ und den Wurzeln $\lambda/\mu = -a_\varrho$ der Gleichungen des Satzes Hauptpunkte beschreibt oder unbestimmt wird, daß die Nullstellen von $\Lambda(\lambda,\mu;y)$ und $\phi_o(\lambda,\mu;y)$ nur Punkte von M (Seite 1) liefern, daß die damit noch nicht erfaßten Teile von M höchstens eine algebraische Hyperfläche von Punkten y zum Bild haben können (außerhalb dieser beschreiben also sämtliche im Satz erwähnten Wurzeln reguläre Urbildpunkte), und daß für jedes y außerhalb einer weiteren algebraischen Hyperfläche sämtliche Wurzeln voneinander verschieden sind, also mit (3) verschiedene Urbildpunkte beschreibtn.

Bezeichnen wir nun sinngemäß einen Punkt x als nicht-reguläres Urbild, wenn (1) in x nicht unbestimmt wird, aber $M(y)\subset M(x)$ ist, so läßt sich in Ergänzung zu Satz 1 beweisen

Satz 2: Ist x ein nicht-regulärer Urbildpunkt, $f(x,x^1) - a_{\varrho_o} f(x,x) = 0$, $x \notin H_\varrho, M$ $(\varrho = 1,\ldots,r)$, und y sein Bild nach (1), so hat die reduzierte Parametergleichung (Satz 1) für y eine Wurzel $\lambda/\mu = -a_{\varrho_o}$ mehr als dieselbe Gleichung für den allgemeinen Punkt in M(x); y ist "in M(x) nicht-regulär".

Zu den Begriffsbildungen in Satz 2 ist zu bemerken: M(x) wird aufgespannt von den (linear unabhängigen) Punkten x^i $(i = 0,\ldots,d_x-1)$, der allgemeine Punkt in M(x) ist sinngemäß der Punkt $z = \sum w_i x^i$ mit unbestimmten Koordinaten w_i. Zu z existiert k_z (vgl. Seite 4); Maximum der k_z in M(x) ist k(x), und z heiße in M(x) regulär, wenn $k_z = k(x)$. Der Beweis erfolgt durch Berechnung und Diskussion der reduzierten Parametergleichung mit z statt y in geeigneter Normierung bei vorgegebenem x.

Mit Satz 2 ist die Gültigkeit von Satz 1 insofern auf die Gesamtheit der Urbildpunkte (Bestimmtheitsstellen von (1)) ausgedehnt, als wir ... den Unbe-

stimmtheitsstellen von (3) mit (4) bei gegebenem y die Urbildpunkte zu y auf den Quadriken $f(x,x^1) - a_\varrho f(x,x) = 0$ zuordnen konnten, sie bilden im allgemeinen Unterräume mit von Null verschiedener Dimension. Entsprechend der Definition von k ist die Gesamtabbildung genau dann als singulär zu bezeichnen, wenn $k = 0$, andernfalls als regulär. Singuläre Fälle:

a) $D = 1$, entsprechend $f(y^1,y) - a_\varrho f(y,y) \equiv 0$, ϱ fest;

b) $D_1 = 0$, entsprechend $m_2(x) \equiv m_1(x^1)$;

c) $b/c = a_\varrho$ für ein geeignetes ϱ.

Damit ist bewiesen der

Satz 3: Die Abbildung (1) ist dann und nur dann regulär und

a) kubisch, wenn $f(x,x)$, $f(x,x^1)$ teilerfremd sind und der Grad des $f(x,y)$ zugehörigen Minimalpolynoms in A gleich $D \geq 2$ ist. Inverse Abbildung ist (3) mit den Nullstellen λ/μ von $\Phi(\lambda,\mu;y)$ nach (4), (D-1)-deutig.

b) quadratisch, wenn $f(x,x) \equiv l(x)\, m_1(x)$, $f(x,x^1) \equiv l(x)\, m_2(x)$ und $m_1(x) \not\equiv m_2(x) \not\equiv m_1(x^1)$ ist. Inverse Abbildung ist (3) mit den Nullstellen λ/μ von $\Psi(\lambda,\mu;y)$ nach (6), D_1-deutig.

c) linear, wenn $c\, f(x,x^1) - b\, f(x,x) \equiv o$, $b/c \neq a_\varrho$.

Ausnahme: der Grad der Abbildung (und Umkehrung) in a) und b) erniedrigt sich um 1, wenn (2) ein Strahlenbündel beschreibt (Zentralkollineation).

Den Abbildungen b) läßt sich noch eine weitere, nämlich mit $D_1 = d$ (vgl. unter (6)), hinzufügen, indem wir statt (1) die Abbildungsgleichung

$$y = x^1 m_1(x) - x\, m_2(x) \tag{7}$$

der Diskussion zugrunde legen. Die Umkehrung ist festgelegt mit (3) und einer Parametergleichung $\Psi(\lambda,\mu;y) = 0$ von gleicher Gestalt wie in (6). Jede reguläre quadratische Abbildung (1), Fall b), ist in (7) enthalten. Für $D_1 < d$ ist

auch jede Abbildung (7) in der Gestalt (1) mit geeignetem $l(x)$ darstellbar. Durch Diskussion der singulären quadratischen Abbildung (1) und Vergleich mit (7) folgt

Satz 4: Ist im R_n zwischen zwei Hyperebenen $l(x) = 0$ und $n_1(y) = 0$ eine rationale Abbildung dadurch definiert, daß jedem Punkt x auf l der Schnittpunkt von (2) mit m_1 als Bild entspricht, und werden alle Urbildpunkte aus einen beliebigen Raumpunkt auf m_1 projiziert, so ist damit eine quadratische Abbildung (7) von m_1 auf sich erklärt. Jede Abbildung (7) des R_{n-1} in sich läßt sich auf diese Weise in R_n konstruieren.

Nach Satz 2 und Satz 3 ist (1) genau dann Cremona-Transformation, wenn k=1, d.h. wenn a) D=2 oder b) $D_1=1$ ist, insbesondere also für beliebige Korrelationen, wenn d=2 ist. In diesen Falle beschreibt (2) ein System invarianter Geraden, z.B. ein Strahlenbündel (Zentralkollineation) oder im R_3 eine der linearen Kongruenzen; Grad und Struktur von Abbildung und Umkehrung sind gleich. Für die übrigen C.T. (1) ist der Grad der Umkehrung zu diskutieren. Die Umkehrung läßt sich durch Einsetzen der einzigen Wurzel der reduzierten Parametergleichung unmittelbar anschreiben (vgl. Seite 9). Es ist zu untersuchen, welche gemeinsamen Teiler in den rechten Seiten dieser Gleichungssysteme auftreten können. Die Charakteristik der Matrix A, nach Sègre angegeben, sei

$$\chi(A) = \left[(c_{11},\dots,c_{1s_1}); \quad \dots \quad ;(c_{r1},\dots,c_{rs_r})\right]; \quad \sum c_{\varrho\sigma} = n+1.$$

Ingeeigneter Normierung ergibt sich dann vermittels Diskussion geeigneter Komponentengleichungen der

Satz 5: Die C.-T. III (Seite 9) sind kubisch, ihre Umkehrungen von Grade

α) 2d-1, β) 2d-2 oder γ) 2d-3, wenn in geeigneter Normierung

a) α) keine, β) eine oder γ) jede der beiden Zerlegungen:

$$f(y^1,y) - a_2 f(y,y) = (a_1-a_2)\, y_{c_{11}}\, l_1(y) \quad \text{mit} \quad c_{11} > c_{12};$$

$f(y^1,y) - a_1 f(y,y) = (a_2-a_1)\, y_{c_{21}} + \sum c_{1\sigma}\, l_2(y)$ mit $c_{21} > c_{22}$

möglich ist, oder wenn

b) $\alpha)$ $f(y^1,y) - a_1 f(y,y) \neq y_{c_{11}}\, l_1(y)$ oder $c_{11} = c_{12}$

$\beta)$ $f(y^1,y) - a_1 f(y,y) = y_{c_{11}}\, l_1(y)$ mit $c_{11} > c_{12}$ oder

$\gamma)$ $f(y,y) = y_{c_{11}-1}\, l_1(y) + y_{c_{11}}\, l_2(y)$ mit $c_{11} > c_{12}+1$ ist,

der erreichbare Maximalgrad ist dabei $2n-1$.

Die C.-T. IV und ihre Umkehrungen sind quadratisch.

Die C.-T. V sind quadratisch, ihre Umkehrungen vom Grade $\alpha)$ d, $\beta)$ d-1, wenn

$\alpha)$ $m(y) \neq c\, y_{c_{11}}$ oder $c_{11} = c_{12}$ oder

$\beta)$ $m(y) = c\, y_{c_{11}}$ mit $c_{11} > c_{12}$ ist.

Der erreichbare Maximalgrad ist n.

Die maximalen Gradzahlen ergeben sich sofort durch Aufstellung der Transformationsgleichungen für $d = n, n+1$.

Abschließend läßt sich zeigen, daß die angegebenen Voraussetzungen, denen die Korrelationsmatrix K genügen muß, damit die verschiedenen in den Sätzen 3 bis 5 angegebenen Typen von Abbildungen (1) entstehen, von untereinander und zur Nullmatrix verschiedenen Matrizen K erfüllt werden, daß also die beschriebenen Abbildungen tatsächlich erzeugt werden. Diese Voraussetzungen sind nämlich bei geeigneter Normierung (A in Jordanform) Bedingungen, denen die Elemente ganzer Zeilen von K genügen müssen. Wir erhalten nun bereits sämtliche vorstehend erörterten Abbildungen, wenn wir alle Zeilen von K, die im Einzelfall solchen Bedingungen unterworfen sind, als nur mit Nullen besetzt annehmen. Es bleiben dann in jeden Falle noch genügend viele Zeilen frei verfügbar, und zwar bei gegebener Kollineation umso mehr, je größer die Vieldeutigkeit der Umkehrung (Satz 3) bzw. je höher der Grad der inversen C.-T. (Satz 5) in den angegebenen Grenzen ist.

I. $f(x,x)$, $f(x,x^1)$ teilerfremd; $d \geqq D \geqq 3$; $\qquad y^i = y \cdot \mathfrak{A}^i$

$$y = x^1 f(x,x) - x f(x,x^1)$$

$$x = \sum_{j=0}^{d-1} \lambda^{d-j-1} \mu^j \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{(j-i)!} \delta_\mu^{(j-i)}(0)\, y^i$$

$$0 = \sum_{j=0}^{D-1} \lambda^{D-j-1} \mu^j \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{(j-i)!} \Delta_\mu^{(j-i)}(0)\, f(y^i, y)\,.$$

II. $\left[f(x,x) \equiv \ell(x)\, m_1(x),\ f(x,x^1) \equiv \ell(x)\, m_2(x)\right]$; $m(x) \equiv m_2(x) - m_1(x^1) \not\equiv 0$; $d \geqq D \geqq 2$

$$y = x^1 m_1(x) - x m_2(x)$$

$$x = \sum_{j=0}^{d-1} \lambda^{d-j-1} \mu^0 \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{(j-i)!} \delta_\mu^{(j-i)}(0)\, y^i$$

$$0 = \sum_{j=0}^{D} \lambda^{D-j} \mu^j \left[\sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^{i-1}}{(j-i)!} \Delta_\mu^{(j-i)}(0)\, m(y^{i-1}) + \frac{1}{j!} \Delta_\mu^{(j)}(0)\, m_1(y) \right].$$

III. $f(x,x)$, $f(x,x^1)$ teilerfremd; $d \geqq D = 2$; $x^1 \not\equiv u\,\ell(x) + a\,x$;

$$y = x^1 f(x,x) - x f(x,x^1); \qquad \Delta(\lambda,\mu) = \begin{cases} (\mu a_1 + \lambda)(\mu a_2 + \lambda) \cdots a) \\ (\mu a_1 + \lambda)^2 \cdots b) \end{cases}$$

a)... b)...
$$x = \sum_{j=0}^{d-1} \left[f(y^1, y) - \left\langle \begin{matrix} (a_1+a_2) \\ 2a_1 \end{matrix} \right\rangle f(y,y) \right]^{d-j-1} \left[f(y,y) \right]^j \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{(j-i)!} \delta_\mu^{(j-i)}(0)\, y^i\,.$$

IV. $f(x,x)$, $f(x,x^1)$ teilerfremd; $\qquad x^1 \equiv u\,\ell(x) + a\,x$;

$$y = u f(x,x) - x f(x,u)$$

$$x = u f(y,y) - y f(u,y)\,.$$

V. $\left[f(x,x) \equiv \ell(x)\, m_1(x),\ f(x,x^1) \equiv \ell(x)\, m_2(x)\right]$; $m(x) \equiv m_2(x) - m_1(x^1) \not\equiv 0$; $d > D = 1$;

falls $x^1 \equiv u\,\ell_1(x) + a\,x$ ist, sei $m_2(x) \not\equiv c\,\ell_1(x)$;

$$y = x^1 m_1(x) - x m_2(x)$$

$$x = \sum_{j=0}^{d-1} \left[m(y) + a_1 m_1(y) \right]^{d-j-1} \left[-m_1(y) \right]^j \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{(j-i)!} \delta_\mu^{(j-i)}(0)\, y^i\,.$$